

文章编号: 1000-8055(2007)05-0761-07

非线性壁板颤振计算的子循环预测 校正方法研究

刘占生, 张云峰

(哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 为了解决流固耦合问题中弱耦合计算方法存在的滞后误差引起计算发散的问题, 将子循环方法与预测校正方法相结合, 使用有限元方法求解壁板动力响应, 使用 Fluent 求解受扰动的流场, 使用基于拉伸弹簧与扭转弹簧的动态网格方法更新流场网格, 分析了弹性壁板在超声速气流作用下的非线性动力响应, 结果表明此方法能准确预测壁板颤振的响应特性, 计算稳定性优于弱耦合方法, 可以保持长时间计算结果的稳定性。

关 键 词: 航空、航天推进系统; 壁板颤振; 流固耦合; 子循环; 预测校正

中图分类号: V231.9

文献标识码: A

Nonlinear panel flutter computation with subcycling and predict-correct scheme

LIU Zhan-sheng, ZHANG Yun-feng

(School of Energy Science and Engineering,

Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Weak coupling scheme in fluid-structure interaction introduces lag error which results in divergence of computation. To eliminate the error and enhance computing efficiency, subcycling and predict-correct scheme were combined and applied to the supersonic nonlinear panel flutter problem. Dynamic response of the panel was simulated with finite element method, while the geometric nonlinear effect caused by large deflection of the panel was considered. The fluid flow disturbed by panel vibration was computed with Fluent, which has the ability to calculate the governing equations with geometry conservation law. It is demonstrated that the subcycling predict-correct scheme is able to eliminate the lag error of weak coupling and keep the long running time of computation stable.

Key words: aerospace propulsion system; panel flutter; fluid-structure interaction; subcycling; predict-correct scheme

流固耦合问题涉及到流场和结构的多物理场分析, 由于对于一般问题很难得到理论解, 所以数值仿真成为研究此类问题的主要手段。

在计算结构力学中主要的数值方法是有限单元法, 一般基于拉格朗日坐标系, 针对质点进行分

析, 而计算流体力学中主要使用有限差分法和有限体积法, 一般基于欧拉坐标系, 针对空间坐标进行分析。坐标系的不统一给流固耦合数值分析带来了困难, 为了解决这个问题, Hirt^[1] 提出在任意拉格朗日-欧拉坐标系下计算流动状态, 使控制体

收稿日期: 2006-04-14; 修订日期: 2006-06-15

作者简介: 刘占生(1962), 男, 黑龙江省牡丹江人, 教授, 博士生导师, 主要从事转子动力学, 机械故障诊断, 流固耦合振动分析。

的位置和形状随时间变化,建立任意拉格朗日-欧拉坐标系下的流体控制方程,将绝对速度改为相对速度,绝对通量改为相对通量.

相对速度和相对通量的计算要求已知控制体边界的运动速度.为保持计算守恒,其必须满足几何守恒定律^[2]. Thomas^[3], Demirdzic 和 Peric^[4,5] 分别推导出可应用于结构化网格的有限差分形式和有限体积形式的几何守恒定律, Trepanier^[6] 则给出可应用于非结构化网格的几何守恒定律. Leroisse^[7] 和 Guillard^[8] 给出了离散几何守恒定律,证明了几何守恒定律对于保持运动网格点计算守恒的重要性,保证几何守恒定律就可以保证非常计算至少在时间上达到一阶精度.

另外,在流固耦合问题中,结构的位形随时间不断变化,导致流场的边界位形也在不断变化,因此边界上的网格点以及计算域内部的网格点都需要移动以适应变化的边界位形.解决这一问题有两种方法:一是在每个时间步重新生成网格,但由于这种方法计算耗费比较大,因此使用较少;二是流场网格不重新生成,仅仅移动原网格点,这种方法可以节省计算耗费,但边界变形较大时,网格质量会下降很多,因此可结合网格光顺算法以提高移动后的网格质量. Batina^[9] 提出使用基于弹簧模拟的方法来移动网格点,但这种方法只考虑了弹簧的拉伸刚度,对于扭转变形较大的状况效果欠佳. Farhat^[10] 推导出扭转弹簧与拉伸弹簧模拟相结合的动态网格算法, Degand 将其推广到三维空间^[11],可有效改善大位移大变形时网格的质量.

在耦合边界上,结构的网格划分和流场的网格划分一般是不一致的,通常结构网格比流场网格稀疏,因此通过耦合边界传递流场压力和结构位移参数时,需要考虑因此造成的误差^[12]. Harder^[13] 提出了无限平板样条方法 (IPS), Duchon^[14] 则提出了 IPS 的另一种形式,薄平板样条方法 (TPS). Goura^[15] 提出了常体积转换方法 (CVT), 网格插值精度优于 IPS, 徐敏等^[16] 通过引入面积限定因子概念对常体积转换法进行改进,提高了插值精度.

在解决了动态网格上的流场计算和不一致网格上的插值问题后,如何将结构和流场计算耦合在一起仍是一个难题.最简单也是应用最多的是弱耦合方法,即结构和流场分别计算,以上一个时间步流场计算的结果作为下一个时间步结构的载荷条件,或者相反.此方法在早期的气动弹性和流

固耦合计算中应用很多^[17],但因时间不同步,使得误差随着计算时间的增长而累积,破坏计算结果,因而限制了实际应用中的时间步长,增大计算耗费.一种改进方法是,基于能量守恒的观点使用结构预测算子^[18],根据结构振动位移预测下一个时间步的位移,以此作为下一个时间步流场计算的边界,通过合理设计结构预测算子,保证计算精度、降低误差.但是结构算子的选择与流场的计算格式有关,如果流场计算格式未知或者比较复杂,则结构预测算子的选择非常困难甚至不能实现,而且对于实际的计算来说,要保证能量的守恒几乎不可能, Piperno^[19] 对一组预测算子进行了分析,得到了相同的结论.另一种改进方法是采用子循环方法,将流场计算的时间步长与结构时间步长分离,根据各自特点分别求解. Hughes^[20] 和 Belytschko^[21] 分别研究了子循环方法对计算稳定性的影响.但目前尚未看到将子循环方法与结构校正算法相结合的研究应用.

本文根据这两种方法的优点,使用子循环方法和基于线性多步法的结构预测算子,并加入校正步形成子循环预测校正方法,一方面消除弱耦合方法带来的计算误差及其导致的数值不稳定,另一方面消除预测算子对结构与流场计算格式的依赖并提高计算效率.文中以超声速非线性壁板颤振分析为例,计算其在不同动压和时间步长下的动力响应,得到其极限环颤振频率和振动幅值,并分析子循环方法和预测校正方法对计算效率以及计算误差的影响.

1 控制方程

1.1 壁板结构振动方程

假设壁板为弹性介质,不考虑结构阻尼,使用有限元方法离散,得到振动方程

$$M\ddot{x} + K\dot{x} = F(p) \tag{1}$$

其中 M 、 F 、 x 分别表示壁板的质量矩阵、刚度矩阵和位移向量, $F(p)$ 表示与流体压力有关的作用力.

1.2 流体控制方程

对于随时间移动的任意控制体,其积分形式的守恒方程可以写成

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho(u - u_g) \cdot n dS &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \int_S \rho u(u - u_g) \cdot n dS + \int_V \nabla p dV &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho E dV + \int_S \rho E (\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \nabla \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2)$$

其中 V, S 分别表示控制体及控制体边界, $\rho, \mathbf{u}, E$ 和 $\mathbf{u}_g$ 分别表示流体的密度、速度、能量以及控制体边界 S 的运动速度.

根据几何守恒定律, 控制体边界的运动速度 $\mathbf{u}_g$ 应满足下式

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \oint_S \mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} dS \quad (3)$$

控制方程时间偏导数使用一阶向后差分离散

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV = \frac{(\rho \phi V)^{n+1} - (\rho \phi V)^n}{\Delta t} \quad (4)$$

其中 ϕ 表示 $1, \mathbf{u}$ 或者 V^{n+1} . 用下式计算

$$V^{n+1} = V^n + \frac{dV}{dt} \Delta t \quad (5)$$

1.3 动网格更新

使用基于拉伸和扭转弹簧模拟的动网格方法更新流场网格. 拉伸和扭转弹簧受力平衡方程分别表示为

$$\mathbf{F}_i^j = \mathbf{K}_i^j \cdot \mathbf{q}^{ij} \quad (6)$$

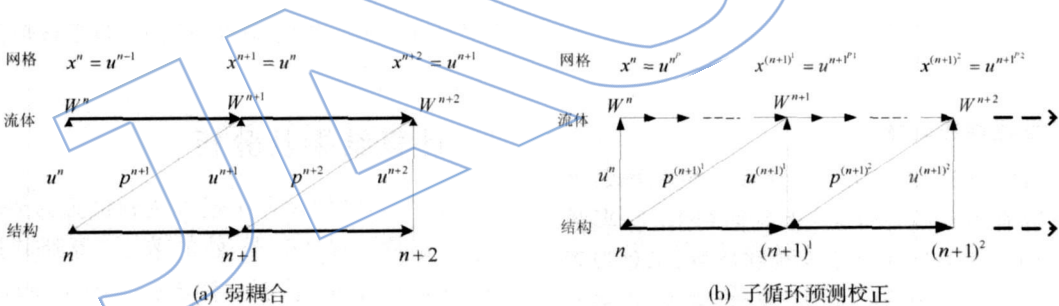


图 1 耦合算法流程示意图

Fig. 1 Sketch map of coupling algorithm flows

预测校正耦合方法的计算流程如下:

已知 n 时刻以及 n 时刻之前的耦合场数值解, 求解 $n+1$ 时刻的数值解

- (1) 利用 $n, n-1, n-2 \dots$ 时刻的结构位移预测 $n+1$ 时刻的结构位移;
- (2) 利用预测的结构位移来移动流场网格;
- (3) 求解网格移动后的流场;
- (4) 将求解得到的流场压力施加到 n 时刻的结构上, 得到 $n+1$ 时刻的结构位移;
- (5) 将此位移与之前预测得到的结构位移比较
 - a. 如果小于预设误差, 则收敛;
 - b. 如果大于预设误差, 则根据此结构位移与预测得到的结构位移, 通过校正得到一个新的结

$$\mathbf{F}_i^{ijk} = [\mathbf{R}^{ijkT} \mathbf{C}^{ijk} \mathbf{R}^{ijk}] \cdot \mathbf{q}^{\bar{ijk}} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{K}_i^{ij}$ 和 $[\mathbf{R}^{ijkT} \mathbf{C}^{ijk} \mathbf{R}^{ijk}]$ 分别表示拉伸弹簧与扭转弹簧的平衡刚度矩阵, $\mathbf{q}^{\bar{ij}}$ 和 $\mathbf{q}^{\bar{ijk}}$ 分别表示拉伸弹簧与扭转弹簧的位移向量, 具体推导过程以及各项含义见参考文献[10, 11, 22].

壁板结构位移作为狄利克莱边界条件加入平衡方程, 使用迭代法进行求解.

1.4 耦合界面间数据传递

结构与流场在耦合边界上的网格划分不一致, 因此结构位移向量需要插值到流场边界网格点上, 同时流场计算得到的边界处压力需要插值到结构有限元模型节点上. 由于本文着眼于分析耦合算法的影响, 因此在这里使用了比较简单的线性插值方法.

1.5 耦合算法

弱耦合方法具有数值不稳定的本质, 需要对其加以改进. 我们使用结构预测算子加上校正步提高计算稳定性, 通过子循环方法减少计算耗费. 弱耦合方法和子循环预测校正方法的流程分别如图 1(a)、(b) 表示.

构位移预测解, 重新进入步骤(2);

另外, 非定常流动计算时间步与结构动态响应计算时间步相比往往低几个数量级, 如果在计算时对流场和结构采用同样的时间步, 就只能以流场时间步为基准, 而造成不必要的结构响应计算, 增大了计算耗费. 因此我们使用子循环方法来解决这个问题. 根据流动的特征时间和结构响应的特征时间, 确定相应的非定常流动计算时间步 Δt_f 和结构响应时间步 Δt_s . 然后可以确定流场子循环步数 $n = \Delta t_s / \Delta t_f$. 在耦合计算时, 流场计算每推进 n 个时间步, 结构计算推进一个时间步. 这样保证了非定常流动计算的准确, 同时节省结构响应的计算次数. 通过这种方式, 可以使耦合场的计

算时间步长增大到合理的值,提升计算效率.

2 计算模型

为了考察该方法性能,使用文献[23]给出的二维壁板颤振模型进行计算.在文献[23]中,分别使用有限差分法求解结构响应和超声速流动,并采用子迭代技术(subiteration strategy)来消除多物理场计算延迟误差.

2.1 壁板结构及有限元模型

壁板结构如图 2 所示,上表面有超声速气流流过,流动方向与未扰动壁板表面平行.壁板两端为固定支承.壁板厚度 h ,沿流向长度 L ,材料密度 ρ ,弹性模量 E_s ,泊松比 σ .结构简化为平面应力模型,使用八节点单元离散为 $1\,000 \times 5$ 的有限元模型,两端节点约束 x, y 自由度位移.

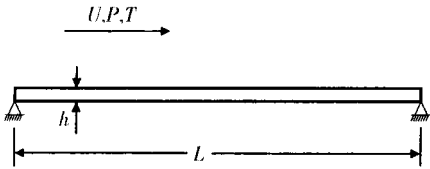


图 2 壁板几何结构与边界条件
Fig. 2 Geometry and boundary condition of panel

2.2 二维超声速流场

流场计算域如图 3 所示,壁板上游流场延伸 $15L$,下游流场延伸 $20L$,向上延伸约 $15L$.壁板以及壁板上、下游分别设置为滑移边界,远处设置成远场边界.远场压力、速度、温度、密度分别为 $p_\infty, u_\infty, T_\infty, \rho_\infty$.流场使用非结构化网格划分,共 9 134 单元,4 690 节点,其中壁板处划分 100 段.

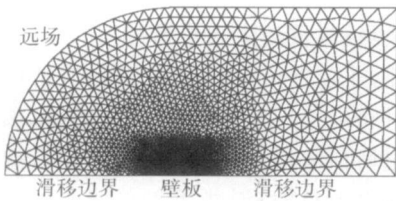


图 3 流场网格划分
Fig. 3 Fluid mesh

使用 Fluent 无粘流场求解器进行求解,二阶迎风格式,动网格功能,设置壁板处为动边界,利用 UDF 扩展,在每个时间步结束之后输出壁板处节点坐标、相应压力分布以及全场节点坐标.压力分布将作为外载荷作用在壁板结构上,通过有限元计算得到结构位移,然后根据节点位移以及

流场节点坐标,利用修正的拉伸弹簧与扭转弹簧模拟相结合的动网格方法获得新的流场节点坐标.最后利用 UDF 扩展,将流场节点坐标返回到求解器中.

2.3 计算方案与参数

为了对比子循环预测校正方法与弱耦合方法的效果,对壁板颤振系统分别使用弱耦合方法与子循环预测校正方法进行计算.选取壁板结构参数如下:

$$\begin{aligned} h/L &= 0.002 \\ \mu_s &= \rho_\infty L / \rho h = 0.1 \\ \sigma &= 0.3 \end{aligned} \tag{8}$$

其中 μ_s 为质量比.

固定自由流马赫数 $Ma = 1.2$,选取六组自由流动压参数 $\lambda = \rho_\infty u_\infty^2 L^3 / D$ 分别为 20, 50, 80, 100, 150, 200, 其中壁板刚度 $D = E_s h^3 / 12 (1 - \sigma^2)$.选取三组时间步 $\bar{t}$ 为 1.0×10^{-4} s, 2.0×10^{-4} s, 4.0×10^{-4} s, 分别对应无量纲时间步 $t = \bar{t} u_\infty / L$ 约为 0.125, 0.25, 0.5. 给定初始条件为 $y = 0, \dot{y} = A \sin(\pi x)$, 其中 x 表示壁板弦向坐标, $y, \dot{y}$ 分别表示壁板横向位移和横向速度, A 为初始速度.取参考长度为壁板厚度 h ,参考频率为 $\omega_0 = \pi^2 \sqrt{D / (\rho h L^4)}$.

3 计算结果及分析

每个算例均计算至壁板达到稳定的运动状态为止.选取 $x/l = 0.75$ 处的节点,得到其运动规律.壁板振动幅值与频率分别如图 4(a), (b) 所示,在所计算的六组动压参数中,动压系数 λ 等于 20 和 50 时,系统未发生颤振,初始扰动随着时间的推移被耗散,系统最终达到静止平衡状态.在后四组动压参数下 ($\lambda = 80, 100, 150, 200$),系统均发生颤振,由于壁板的几何非线性性质,振幅没有呈指数形式增长,而是逐渐达到稳定的极限环运动状态,图 5 给出了动压为 100 时结构振动的时间发展历程.从图 4 中也可以看出,随着动压系数的增大,系统的振动幅值与颤振频率都在上升.计算得到的结果与 Gordnier^[23] 的结果吻合很好.

3.1 不同时间步下长时间计算结果比较

根据 Gordnier^[23] 的分析,当无量纲时间在 $[0.005, 0.04]$ 范围内时,以弱耦合方式进行的计算会在长时间后发散.这是弱耦合本质的非同步性引入的滞后误差造成的,误差随时间的推移而积累造成发散.我们使用子循环预测校正方法,设

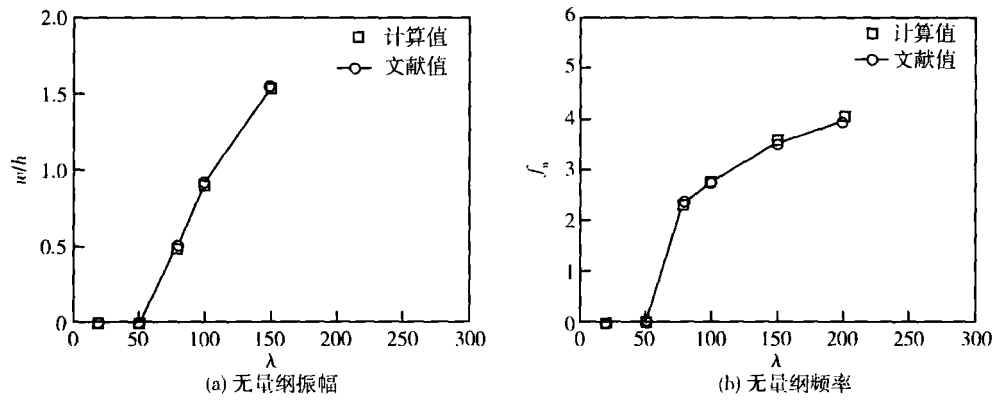


图 4 结构振动幅值与频率随动压变化曲线. $\bar{t} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ s}$

Fig. 4 Vibration amplitude and frequency of structure varies with dynamic pressure, $\bar{t} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ s}$

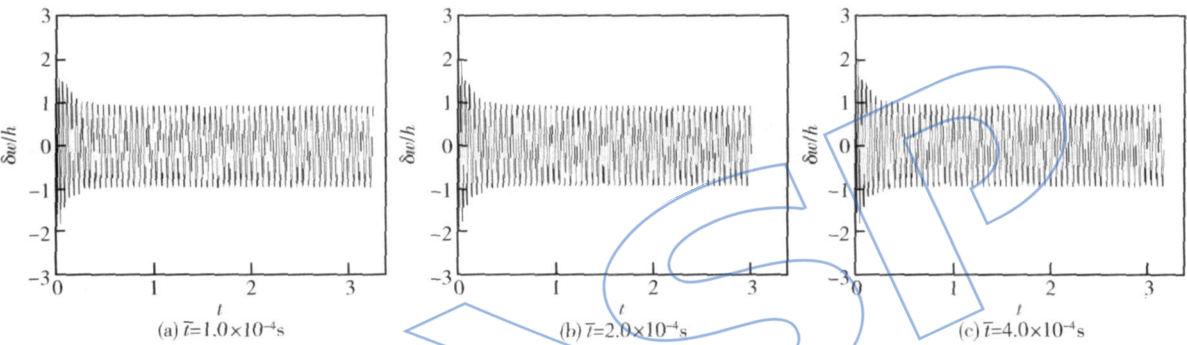


图 5 $x = 0.75L$ 处, 不同时间步长下壁板振动时域波形

Fig. 5 Vibration history of panel in time domain under different timestep, $x = 0.75L$

定动压 100, 时间步长 $\bar{t} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}, 2.0 \times 10^{-4} \text{ s}, 4.0 \times 10^{-4} \text{ s}$, (分别对应无量纲时间约为 0.125, 0.25, 0.5) 进行长时间计算, 并未出现发散, 结果如图 5 所示. 这表明子循环预测校正方法通过迭代的方式有效的消除了滞后误差. 而在不同时间步长下所得到的振动幅值非常接近, 说明子循环预测校正方法可以保证在不同时间步长下计算结果的精度.

3.2 时间步对子循环预测校正迭代次数的影响

子循环预测校正方法需要进行迭代以消除滞后误差, 迭代次数对计算效率的影响很大. 我们设定收敛条件为相对位移误差 0.1%, 在此基础上, 设定动压为 100, 考察时间步长 $\bar{t} = 1.0 \times 10^{-4}, 2.0 \times 10^{-4}, 4.0 \times 10^{-4} \text{ s}$ 时平均每步迭代次数, 结果如图 6 所示. 可以看出, 随着时间步长的增大, 迭代次数随之增大. 另一个方面, 这也表明了弱耦合方式的确存在滞后误差, 且误差随着时间步长增大而增大, 为了消除误差, 迭代次数相应地增加了. 因此, 使用更有效的预测校正方法来减少迭代次数对于提高计算效率是非常必要的.

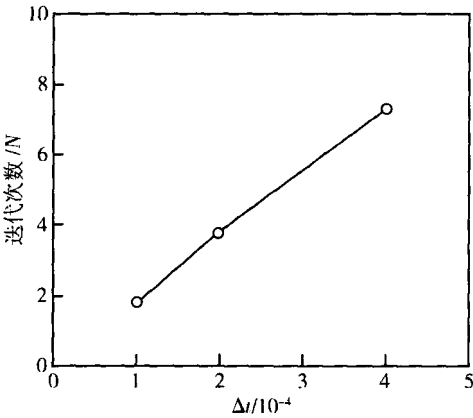


图 6 迭代次数随时间步长的变化

Fig. 6 Number of iteration varies with timestep

3.3 子循环方法对计算效率的影响

固定流场计算时间步长 $\Delta t_f = 2 \times 10^{-5} \text{ s}$, 分别取不同的时间步长即结构响应时间步 $\Delta t_s = 2 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-4} \text{ s}$. 当 $\Delta t_f = \Delta t_s$ 时, 不存在子循环过程. 在采用子循环方法的基础上, 分别使用预测校正和不使用预测校正方法进行计算. 以无子循环无预测校正算例的计算时间

为基准,得到不同时间步长下计算时间比,结果如图7所示。

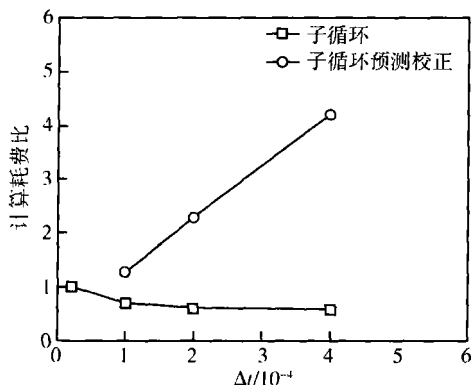


图7 计算耗费随时间步长的变化

Fig. 7 Computation costs varies with timestep

从图中可以看出,当不采用预测校正时,随着时间步的增大,计算耗费在降低,根据子循环方法的原理,此结果是可以预知的.但计算耗费并没有随着时间步的增大而明显下降,这是因为当时间步增大时,计算结构非线性响应的迭代次数也在增多,耗费随之增加.当使用预测校正方法时,计算耗费增加很多,这是因为每推进一个时间步需要多次迭代.当时间步长增大时,计算耗费几乎成线性增长,这是因为弱耦合的滞后误差随着时间步长的增大而增大,为消除误差造成迭代次数增多.因此,可以看出子循环方法能够有效的降低计算耗费,但是预测校正方法对整体计算效率的影响更大。

4 结论

本文根据子循环方法以及预测校正方法的优点,将两方法相结合,对超声速非线性壁板颤振问题进行了研究,结果表明该方法可以消除弱耦合计算时带来的延迟误差,保持计算稳定性,计算结果准确地预测出壁板在不同动压下的振幅、频率等动力响应特性。

子循环方法可以解决流场与结构的计算对时间步长要求不一致的问题,提高计算效率.但是计算效率的提升依赖于结构动力响应计算在不同时间步长下的计算耗费。

分析表明预测校正方法是消除延迟误差的关键,通过迭代将误差保持在一定的范围内,有效地保证了计算的稳定性.同时也发现,预测校正方法对计算效率的影响比子循环方法要大,因此设计高效率的预测校正算法是非常关键的。

参考文献:

- [1] Hirt C W, Amsden A A, Cook J L. An arbitrary lagrangian eulerian computing method for all flow speeds [J]. *Journal of Computational Physics*, 1974, 14(3): 227-253.
- [2] Ferziger J H, Peric M. *Computational methods for fluid dynamics* [M]. Springer Verlag, 2002.
- [3] Thomas P D, Lombard C K. Geometric conservation law and its application to flow computational on moving grids [J]. *AIAA Journal*, 1978, 17(10): 1030-1037.
- [4] Demirdzic I, Peric M. Space conservation law in finite element volume calculations of fluid flow [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1988, 8(9): 1037-1050.
- [5] Demirdzic I, Peric M. Finite volume method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1990, 10(7): 771-790.
- [6] Trepanier J Y, Reggio M, Zhang H, et al. A finite volume method for the Euler equations on arbitrary lagrangian eulerian grids [J]. *Computers and Fluids*, 1991, 20(4): 399-409.
- [7] Lesoinne M, Farhat C. Geometric conservation law for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 134(1-2): 71-90.
- [8] Guillard H, Farhat C. On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 190(11-12): 1467-1482.
- [9] Batina J T. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes [J]. *AIAA Journal*, 1990, 28(8): 1381-1388.
- [10] Farhat C, Degand C, Koobus B, et al. Torsional spring for two dimensional dynamic unstructured fluid meshes [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998, 163(1-4): 231-245.
- [11] Degand C, Farhat C. A three dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes [J]. *Computers and Structures*, 2003, 80(3-4): 305-316.
- [12] Goura G S L, Badcock K J, Woodgate M A, et al. Extrapolation effects on coupled computational fluid dynamics/computational structural dynamics simulations [J]. *AIAA Journal*, 2003, 41(2): 312-314.
- [13] Harder R L, Desmarais R N. Interpolation using surface splines [J]. *Journal of Aircraft*, 1972, 9(2): 189-191.
- [14] Duchon J. Splines minimizing rotation invariant seminorms in sobolev spaces [A]. *Constructive Theory of Functions of Several Variables* [C]. Berlin: Springer Verlag, 1977: 85-100.
- [15] Goura G S L, Badcock K J, et al. A data exchange method for fluid structure interaction problems [J]. *The Aeronaut*

- tical Journal, 2001, 105(1046): 215-221.
- [16] 徐敏, 陈士鲁. CFD/CSD 耦合计算研究 [J]. 应用力学学报, 2004, 21(2): 33-36.
- XU Min, CHEN Shilu. Study of data exchange method for coupling computational CFD/CSD [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2004, 21(2): 33-36.
- [17] 肖军, 周新海, 谷传纲, 等. 二维叶栅气固耦合颤振分析 [J]. 航空动力学报, 2006, 21(2): 106-111.
- XIAO Jun, ZHOU Xinhai, GU Chuangang, et al. Flutter analysis of 2D cascades under gas-solid coupled conditions [J]. Journal of Aerospace Power, 2006, 21(2): 106-111.
- [18] Farhat C, Lesoinne C, Letaille P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discrimination and application to aeroelasticity [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 157(1-2): 95-114.
- [19] Piperno S. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems Part II: Energy transfer analysis and three dimensional applications [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(24-25): 3147-3170.
- [20] Hughes T J R, Liu W K. Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory [J]. Journal of Applied Mechanics, 1978, 45(2): 371-374.
- [21] Belytschko T, Smolenski P, Liu W K. Stability of multi-time step partitioned integrators for first-order finite element systems [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 49(3): 281-297.
- [22] 刘占生, 张云峰. 拉伸弹簧与扭转弹簧模拟动态网格方法分析与改进 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37(8): 1098-1102.
- LIU Zhansheng, ZHANG Yunfeng. Analysis and enhancement on linear spring and torsional spring based dynamic mesh method [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2005, 37(8): 1098-1102.
- [23] Gordnier R E, Visbal M R. Development of a three-dimensional viscous aeroelastic solver for nonlinear panel flutter [J]. Journal of Fluids and Structures, 2002, 16(4): 497-527.